KTH TEORETISK FYSIK

TENTAMEN KVANTFYSIK SI1151
Onsdag 140108 kl. 08.00-13.00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	Teoretisk fysiks formelsamling, BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 5537 8475

1. En spinn 1 partikel har Hamiltonianen

$$H = \omega S_z$$

där ω är en konstant. Systemets tillstånd ges vid tiden $t = 0$ av

$$|\Psi\rangle = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

där A är en konstant.

(a) Bestäm värdet på A och de möjliga värden som kan fås vid en mätning av systemets energi samt sannolikheten att få dessa värden.

(b) Bestäm tillståndet vid tiden t.

2. En atom av väteisotopen tritium (^{3}H) kan genom spontant radioaktivt beta-sönderfall övergå till en helium-3 jon (^{3}He$^+$). Processen, som involverar kärnan, innebär att kärnladdningen ändras från $Z = +1$ till $Z = +2$ vid oförändrad massa och är så snabb att elektronvågfunktionen kan antas vara oförändrad (s.k. "sudden approximation"). Bestäm sannolikheten för att hitta helium-3 jonen i sitt grundtillstånd om tritiumatomen befann sig i sitt grundtillstånd innan sönderfallet.

3. En endimensionell harmonisk oscillator störs av en hastighetsberoende potential som ges av

$$H' = cp^2$$

där c är en konstant och p är rörelsemängdsoperatorn.

(a) Använd första ordningens störningsteori och stegoperatormetoden för att bestämma korrektionen till grundtillståndsenergin.

(b) Bestäm den exakta grundtillståndsenergin och jämför med resultatet i (a).

VÄND!

4. Studera en tvådimensionell harmonisk oscillator med potential

$$V(x,y) = \frac{1}{2}kx^2 + ky^2$$

där k är en konstant. Lösningen till den endimensionella harmoniska oscillatorn anses känd.

(a) Konstruera de exakta energinivåerna till den tvådimensionella oscillatorn.

(b) Tre identiska spinn 1/2 partiklar placeras i potentialen. Bestäm grundtillståndsenergin.

(c) Samma som (b) men för identiska spinn 3/2 partiklar.

5. Använd andra ordningens störningsräkning för att uppskatta korrektionen till grundtillståndsenergin hos en väteatom i ett konstant elektriskt fält riktat i z-riktningen (Stark-effekten). Störningen ges av

$$H' = e\mathcal{E}z$$

Ledning: För att uppskatta summan, ersätt $E_n \approx E_2$ för $n > 2$, och använd sedan fullständighetsrelationen.

LYCKA TILL!

Endimensionell harmonisk oscillator:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \ , \ n = 0, 1, 2, ... \ , \ \omega = \sqrt{k/m}$$

Vätetillstånd:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0 n^2} \ , \ n = 1, 2, 3, ... \ , \ \Psi_{100} = \frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \ , \ a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$$

Störningsteori:

$$E_n^1 = \langle n^0|H'|n^0\rangle \ , \ E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m^0|H'|n^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

Lösning till tentamen i Kvantfysik 140108

1. (a) Normering:

$$|\langle\Psi|\Psi\rangle| = |A^2|(1^2 + 2^2 + 3^2) = 14|A|^2 = 1$$

Välj $A = 1/\sqrt{14}$

Spinn 1 egenvärden: $S_z = 0, \pm\hbar$. Energiegenvärden $E = \omega S_z$: $E_0 = 0, E_{\pm1} = \pm\hbar\omega$

Sannolikheter:
$P_1 = 1/14, P_0 = 2^2/14 = 4/14, P_{-1} = 3^2/14 = 9/14$

Koll: $P_1 + P_0 + P_{-1} = (1 + 4 + 9)/14 = 1$. OK.

(b) Tillstånd vid tid t:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1e^{-iE_1 t/\hbar} \\ 2e^{-iE_0 t/\hbar} \\ 3e^{-iE_{-1} t/\hbar} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ 2 \\ 3e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

---

2. Sannolikheten att hitta jonen i grundtillståndet är

$$|\langle\Psi_{100}(Z=2)|\Psi_{100}(Z=1)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\pi}\frac{2^{3/2}}{a_0^3}4\pi\int_0^\infty e^{-3r/a_0}r^2dr\right|^2$$

$$= \left|4\cdot 2^{3/2}\int_0^\infty e^{-3x}x^2dx\right|^2$$

$$= \left|4\cdot 2^{3/2}\cdot\frac{2}{27}\right|^2 = \frac{512}{729} \approx 0.70$$

3. (a)

$$p = i\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2}(a^\dagger - a) \Rightarrow$$

$$H' = cp^2 = -a\frac{\hbar m\omega}{2}(a^\dagger - a)^2 = -c\frac{\hbar m\omega}{2}((a^\dagger)^2 - a^\dagger a - aa^\dagger + a^2)$$

Första ordningens korrektion till grundtillståndet blir

$$E_0^1 = \langle 0|H'|0\rangle = -c\frac{\hbar m\omega}{2}\langle 0|((a^\dagger)^2 - a^\dagger a - aa^\dagger + a^2)|0\rangle$$

Tre termer ger $=0$ eftersom $a|0\rangle = 0, \langle 0|a^\dagger = 0$. Den enda nollskilda termen kommer från $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = \langle 0|a|1\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$. Detta ger

$$E_0^1 = \frac{\hbar\omega}{2}mc$$

(b) Exakt lösning:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + cp^2 = \frac{p^2}{2m'} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m'} + \frac{1}{2}m'\omega'^2x^2$$

där vi definierat $1/2m' = 1/2m + c, \omega' = \sqrt{k/m'} = \omega\sqrt{m/m'}$. Grundtillståndsenergin blir

$$E_0 = \frac{\hbar\omega'}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{\sqrt{m/m'}}_{=\sqrt{1+2mc}} = \frac{\hbar\omega}{2}(1 + mc + ...) =$$

vilket visar att första ordningens korrektion stämmer med svaret i (a).

---

4. (a) Med variabelseparation fås ett problem i x-led och ett problem i y-led med energiegenvärden som ges av de endimensionella uttrycken:

$$E_x = (n_x + 1/2)\hbar\omega\ ,\ E_y = (n_y + 1/2)\hbar\omega'$$

där $n_x, n_y = 0, 1, 2, ..., \omega = \sqrt{k/m}, \omega' = \sqrt{2k/m} = \sqrt{2}\omega$. Totala energin blir

$$E_{n_x,n_y} = E_x + E_y = (n_x + 1/2)\hbar\omega + (n_y + 1/2)\hbar\omega'$$

(b) Enligt Pauli-principen kan inte flera fermioner dela samma enpartikeltillstånd. I enpartikeltillståndet med lägst energi, dvs $n_x = n_y = 0$, finns två partiklar, en spinn upp och en spinn ner, och i första exciterade tillståndet, dvs $n_x = 1, n_y = 0$, finns en partikel med antingen spinn upp eller spinn ner. Grundtillståndsenergi:

$$2E_{0,0} + E_{1,0} = 2(0+1/2)\hbar(\omega+\omega') + [(1+1/2)\hbar\omega + (0+1/2)\hbar\omega'] = (5+3\sqrt{2})/2\hbar\omega \approx 4.6\hbar\omega$$

(c) Spinnet kan nu anta 4 värden: $S_z = \pm\hbar/2, \pm 3\hbar/2$. I grundtillståndet upptas enpartikelgrundtillståndet av tre fermioner med olika spinn. Grundtillståndsenergi:

$$3E_{0,0} = 3(0 + 1/2)\hbar(\omega + \omega') = 3(1 + \sqrt{2})/2\hbar\omega \approx 3.6\hbar\omega$$

I båda fallen är grundtillståndet en antisymmetrisk 3×3 Slater-determinant.

5.

$$E^2_{100} = \sum_{(nlm)\neq(100)} \frac{|\langle nlm|H'|100\rangle|^2}{E_1 - E_n} = e^2\mathcal{E}^2 \sum_{n>1,lm} \frac{|\langle nlm|z|100\rangle|^2}{E_1 - E_n}$$

$$\approx \frac{e^2\mathcal{E}^2}{E_1 - E_2} \sum_{n>1,lm} |\langle nlm|z|100\rangle|^2$$

Summan kan beräknas exakt med följande trick. Eftersom z är udda och $|\Psi_{100}|$ är sfäriskt symmetrisk dvs jämn, så är $\langle 100|z|100\rangle = \int z|\Psi_{100}|d^3r = 0$, dvs det finns inget första ordningens Stark-shift i grundtillståndet. Därför kan summan ovan inkludera även 100-termen:

$$E^2_{100} \approx \frac{e^2\mathcal{E}^2}{E_1 - E_2} \sum_{nlm} \underbrace{|\langle nlm|z|100\rangle|^2}_{=\langle 100|z|nlm\rangle\langle nlm|z|100\rangle}$$

Fullständighetsrelationen:

$$E^2_{100} \approx \frac{e^2\mathcal{E}^2}{E_1 - E_2}\langle 100|z^2|100\rangle$$

Beräkna matriselementet:

$$\begin{aligned}
\langle 100|z^2|100\rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^2 \cos^2\theta\, |\Psi_{100}|^2 \\
&= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r^4 e^{-2r/a_0} dr \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{a_0^2}{\pi} \underbrace{\int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx}_{=3/4} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta}_{=2/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \\
&= a_0^2
\end{aligned}$$

Korrektionen blir:

$$E^2_{100} \approx \frac{a_0^2 e^2\mathcal{E}^2}{E_1 - E_2} = a_0^2 e^2 \mathcal{E}^2 \frac{1}{(e^2/8\pi\epsilon_0 a_0)(-1 + 1/4)} = -\frac{8}{3}(4\pi\epsilon_0)a_0^3\mathcal{E}^2 \approx -2.7(4\pi\epsilon_0)a_0^3\mathcal{E}^2$$

Anm: Eftersom $E_n > E_2, n > 2$ ger detta en underskattning.
Korrektionen kan beräknas exakt: $E^2_{100} = -\frac{9}{4}(4\pi\epsilon_0)a_0^3\mathcal{E}^2 = -2.25(4\pi\epsilon_0)a_0^3\mathcal{E}^2$.
(Se tex. L. Ballentine, Quantum Mechanics: A Modern Development, P. 282-4.)